**La théorie sémantique de l’information au chevet de la science et des arts.**

***1. La science et l’homme.***

L'objectif primordial de la science est de faire la différence entre ce qui est possible et ce qui ne l'est définitivement pas. Elle est le rempart que l’homme civilisé s’est patiemment construit pour se préserver des croyances arbitraires. Elle est censée répondre aux questions supposées bien formulées que l'on se pose depuis la nuit des temps, questions au sujet desquelles les religions, longtemps consultées faute de mieux, ne peuvent être que muettes. En revanche, au plan spirituel, la science n’apporte aucune réponse aux questions existentielles, ce n’est pas son but et c’est hors de sa portée.

Notre science est l'œuvre de l'être humain dont elle hérite de toutes les limitations. En particulier, elle est entièrement dépendante de la particularité de ses sens pour ce qui concerne l’observation et des limites de son intellect pour ce qui concerne les modélisations théoriques et leur transmission. Des extra-terrestres, à supposer qu'ils existent et qu'ils s'occupent également de science, sont sans doute témoins de phénomènes naturels semblables à ceux que nous observons mais il serait bien surprenant que leurs traités ressemblent en tous points aux nôtres.

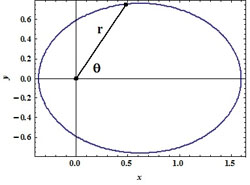
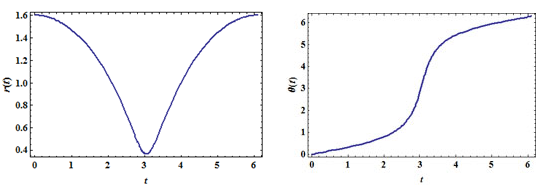
La science oeuvre habituellement en trois temps :

- Le temps de l’observation est celui où l’on collationne un maximum de données quantitatives relatives aux phénomènes que l’on observe spontanément dans la nature ou à ceux qui résultent de l’expérimentation en laboratoire. Cette expérimentation n’est pas toujours possible soit pour des raisons éthiques (expérimentations invasives sur l’homme voire l’animal) soit pour des raisons évidentes, comme en astrophysique où l’on voit mal comment on provoquerait la naissance d’une étoile. L'observation n'est exploitable que si elle produit un ensemble de grandeurs mesurées que l'on peut consigner dans un registre. La collecte de ces données passe par un processus de mesures directes ou indirectes, ces dernières ne manquant pas de poser problème. Pour en savoir plus sur les limites de la mesure indirecte, cliquez [ici](file:///C:\Users\User\Desktop\information\Le%20problème%20de%20la%20mesure%20classique.docx).

- Le temps de la modélisation consiste à compresser l’ensemble des données collectées en un programme court, si possible minimal. C’est le problème central de l’activité scientifique : il est non seulement ardu mais pire encore, génériquement voué à l’échec pour cause d’indécidabilité. En peu de mots, cette indécidabilité, au sens de Turing, doit être comprise comme suit : un tableau de données est assimilable à une suite, SN, de longueur, N, de caractères alphanumériques, éventuellement binaires, 0 et 1, cela n'est nullement une restriction et cela simplifie l'exposé. Il est très facile de concevoir un programme qui imprime cette suite : ***Print[{S[[1]], S[[2]], …, S[[N]]}]*** convient certainement qui en imprime les termes les uns après les autres. Ce programme n'est pas très intelligent, c'est une simple impression n'effectuant aucun calcul, et il n'est certainement pas compresseur puisqu'il exige l'énoncé in extenso de la suite complète. Rien n'empêche de chercher un programme (binaire) plus court qui imprime la suite, S, au terme de son exécution. En procédant comme suit, il semblerait même que l'on devrait pouvoir identifier le programme maximalement compresseur, soit le plus court qui effectue cette tâche : il suffirait d'essayer tous les programmes dans l'ordre des tailles croissantes et d'interrompre la recherche lorsque la suite S est imprimée. Certes cette stratégie risque de prendre du temps car il existe 2k+1 programmes (binaires) de longueur inférieure ou égale à k mais on peut espérer trouver des raccourcis intelligents, après tout la science appartient aux savants ! Le problème c'est que cette stratégie ne fonctionne pas de façon sûre pour n'importe quelle suite, S, donnée d'avance à cause de l'indécidabilité de l'arrêt des programmes. Il existe une infinité de programmes qui s'arrêtent certainement (on le constate de visu) et d'autres qui ne s'arrêtent certainement pas car ils entrent dans une boucle périodique qui ne se termine jamais. Hélas il existe un troisième cas, celui de l'infinité des programmes qui tournent sans jamais faire mine de s'arrêter ni de boucler périodiquement : pour ces programmes il n'existe aucun moyen de prévoir s'il vaut la peine d'attendre qu'ils s'arrêtent ou s'il vaut mieux renoncer. On pourrait être tenté de démontrer l'une ou l'autre de ces éventualités en raisonnant dans un cadre axiomatique approprié, celui de l'arithmétique de Péano, par exemple, mais cela ne fonctionne pas davantage : cette arithmétique est notoirement indécidable au sens de Gödel, cette fois, ce qui signifie qu'il existe des propositions arithmétiques bien formulées qui ne peuvent être prouvées ni réfutées dans son cadre. Ce tableau peut paraître désastreux mais c'est tout le contraire qui se passe : sans l'indécidabilité, l'activité scientifique serait dépourvue d'intérêt car elle se ramènerait à une procédure purement mécanique consistant à essayer tous les programmes jusqu'à tomber sur ceux qui compressent au mieux les données observées. Seul un mélange d'intelligence, de patience, de flair ou d'ingéniosité peut venir à bout d'une modélisation réussie. Le lecteur curieux d'en apprendre davantage sur la compression des suites binaires peut cliquer [ici](Comprression%20des%20suites%20binaires%20finies.docx).

- Le temps de l’interprétation est le plus délicat car le moins objectif : il consiste à insérer le modèle construit dans le cadre d’une théorie générale qui emporte l’adhésion du plus grand nombre. Cette théorie doit enrober le modèle compressé des données dans une expression littéraire seule capable d’en assurer la diffusion. Les mêmes extra-terrestres l'expriment sans aucun doute en des termes très différents des nôtres. Il n’est d’ailleurs pas sûr que notre science recommencée serait identique dans sa présentation à ce que nous enseignons actuellement.

Récapitulons sur un exemple simplifié qui n'a, de ce fait, pas la prétention d'être absolument réaliste. Commençons par nous mettre à la place d'un observateur inertiel disposant de tous les moyens métronomiques nécessaires pour déterminer la révolution d'un satellite, de masse m, autour d'une planète suffisamment lourde pour être considérée comme fixe. La trajectoire réelle correspond aux graphes suivants :

Nous connaissons un excellent programme compresseur de ce système : il repose sur les équations différentielles de Newton, transcrites ici dans le formalisme hamiltonien en termes des coordonnées polaires du satellite, r(t) et (t), auxquelles il convient d'ajouter un jeu de conditions initiales (=1, avec les unités choisies, m=1/2 et M=2/G) :

Ce programme semble court mais il ne l'est pas tant que cela car il sous-entend l'appel à un ensemble de routines - par exemple une méthode de Runge-Kutta - capables de calculer numériquement la solution de ce système à la précision demandée.

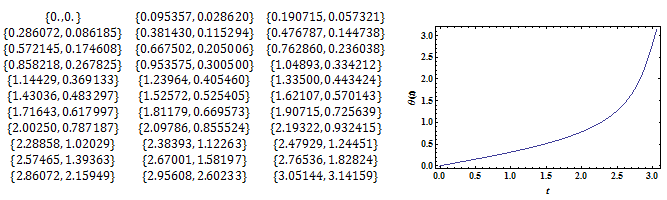
D'autres programmes compresseurs sont certainement possibles : celui qui suit ne comprend plus aucune équation différentielle et cependant il est strictement équivalent au précédent, une démonstration de ce fait étant possible dans le cadre axiomatique habituel, ZFC, de la théorie des ensembles. Il est constitué par les 4 invariants du système dont trois sont autonomes (= explicitement indépendants du temps) :

Ce programme compresseur sous-entend à nouveau les routines algébriques nécessaires au calcul des variables à tout instant. Concrètement, la dernière équation reformatée en,

livre  en fonction de t, tandis que r(t) résulte de l'équation de la trajectoire obtenue en éliminant p et q entre les trois premiers invariants,

C'est l'équation de l'ellipse képlérienne, parcourue périodiquement, la période valant,

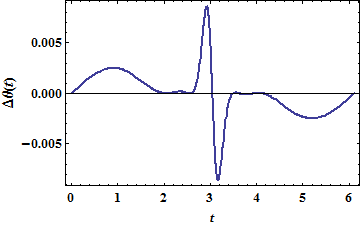
Mettons-nous, à présent, à la place d'un observateur situé sur la planète et qui voit le satellite défiler périodiquement en projection sur la sphère céleste. Posons que les seules mesures accessibles sont angulaires, précisément de l'angle (t). Cette situation est comparable à ce qu'ont vécu les premiers astronomes de l'antiquité, qui mesuraient les déplacements de la lune dans le ciel, par rapport aux étoiles fixes. Des observations de ce type ont effectivement été consignées dans des tables, dès le 7ème siècle avant notre ère et le problème s'est posé de leur trouver une logique interne sous la forme d'un programme compresseur. Dans une présentation modernisée, ces tables, {t, (t)}, limitées à une demi-période de révolution, pourraient ressembler à ceci, dans les unités arbitraires correspondant à la trajectoire décrite ci-avant :



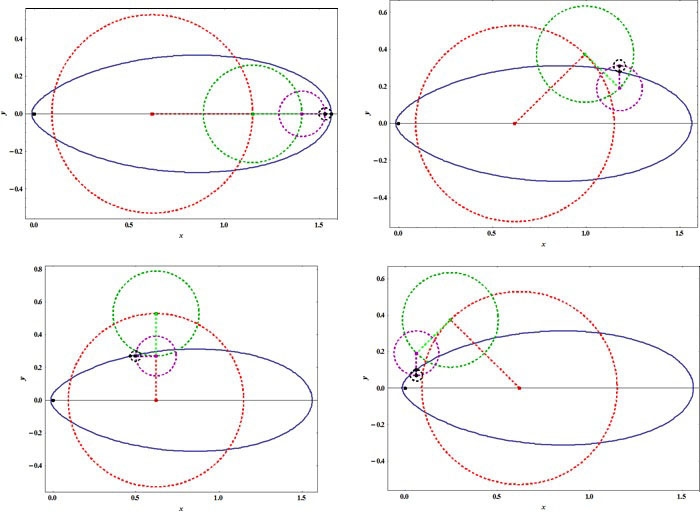
Dans un langage modernisé, le programme imaginé par Hipparque (-190, -120) revient à exprimer les coordonnées du satellite sous la forme de deux séries trigonométriques,

où les paramètres a1, b1, a2, b2, …, doivent être ajustées aux mesures (Note : le paramètre d n'est pas ajustable, en fait, on peut lui donner la valeur que l'on veut car il ne fait que dicter l'échelle dimensionnelle du système. Les données angulaires, , ne contiennent aucune information sur la taille réelle du système gravitationnel étudié, elles ne sont donc pas en mesure de livrer la moindre information à ce sujet et, de fait, les anciens sous-estimaient largement la taille du système solaire).

Le modèle trigonométrique est a priori recevable : en ajustant 4 coefficients seulement, a1, b1, a2 et b2, on retrouve le graphe (t) avec une erreur moindre que 0.01 radians :



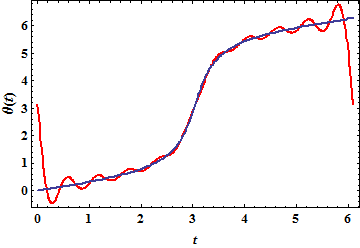
L'interprétation qu'Hipparque fit de ce modèle trigonométrique partit cependant dans une mauvaise direction : convaincu, comme le furent beaucoup d'autres encore longtemps après lui, que dans un monde parfaitement ordonné par la Divinité, le cercle parfait devait être la clé de toute trajectoire céleste, il chercha (et trouva) le moyen de combiner 2n cercles tournant à des fréquences multiples de la fréquence observée comme suit, dans le cas n=2 :



Les cercles rouge, vert, violet et noirs tournent respectivement aux fréquences 1/T, -1/T, 2/T et -2/T. Quelle que soit la distance retenue pour la distance d séparant les centres des cercles rouge t vert, la compression de la table des variations de (t) est correcte. Par contre, la trajectoire n'est pas elliptique et la planète occupe une position beaucoup trop décentrée.

Ce modèle qui paraissait recevable ne l'est, en fait, pas du tout car il ne prend en compte que la variable observée, sans se soucier de l'autre variable, r(t), inaccessible à la mesure directe en ces temps reculés. Il suffit pour s'en rendre compte de comparer la trajectoire prédite à la trajectoire réelle (newtonienne). Cet exemple montre le danger d'une modélisation incomplète, qui ignore d'éventuelles variables cachées, soit faute de mieux car on n'a pas accès à leur mesure directe soit involontairement parce que ces variables ne se manifestent pas à nos sens ni aux moyens d'investigation connus. Cette remarque s'adresse particulièrement à la physique des extrêmes, physiques cosmique et particulaire.

On pourrait s'étonner que la compression par série trigonométrique échoue alors que la fonction périodique, (t), est certainement décomposable en série de Fourier du temps. C'est exact sauf que cette série de Fourier converge très lentement, 10 termes n'approximant (t) que fort imparfaitement :



***2. Complexité et profondeur logique des systèmes.***

En théorie, la complexité (algorithmique) d'une suite binaire vaut la longueur du plus court programme capable de l'imprimer au terme d'un calcul qui s'arrête. Dans le langage des machines de Turing simples, elle vaut le numéro de la première MTS (tel que défini en annexe) qui l'imprime. La profondeur logique de cette suite vaut (p+1)/2 où p est le nombre de pas d'exécution de la MTS minimale.

En pratique, on ne s'embête pas avec le langage maximalement concis des MTS et on se contente de programmes écrits en langage informatique usuel, plus redondants certes mais plus faciles à décoder. A des constantes inessentielles près, les deux approches sont équivalentes,

En règle générale, la longueur d'un programme résulte de l'addition de deux composantes, l'une éventuellement fixe qui encode une fois pour toute la méthode de résolution numérique et l'autre variable qui encode les conditions initiales avec une précision compatible avec celle qui est exigé dans la description (dans l'exemple ci-dessus, 6 chiffres décimaux). Il faut cependant garder à l'esprit que la méthode de résolution peut elle aussi dépendre de la précision demandée par exemple Runge-Kutta.

Voyons cela sur l'exemple du problème de Képler. Le programme minimal se compose de plusieurs éléments :

4 invariants dont les valeurs numériques sont donnée à la précision p=2-n, ce qui exige 4n bits,

Un sous-programme qui calcule r(t) et q(t),

Notre cerveau, à supposer qu'il fonctionne correctement, nous impose, ne serait-ce que par la finitude de ses connexions neuronales, une limite naturelle que l'association en parallèle avec celui des autres ne repoussera jamais à l'infini. A cet égard les limites de la calculabilité offrent la meilleure perspective pour comprendre la situation dans laquelle le scientifique donc au final la science humaine se trouve.

Des êtres extra-terrestres, à supposer qu'ils existent et qu'ils s'occupent également de science, l'exprime sans doute en des termes très différents : sans parler de leur biologie qui pourrait être très différente, leur explication des phénomènes physiques - supposés identiques aux nôtres - réside en des traités dont le contenu nous surprendrait sans aucun doute, ne serait-ce que parce que le langage mathématique utilisé le serait lui aussi.

***La tautologie initiale.***

Aucune discipline scientifique n'échappe au problème de la tautologie initiale, conséquence imparable de ce principe "évident" qu'on ne crée rien à partir de rien.

En physique, le problème de la mesure du temps semble se heurter au cercle vicieux que voici : pour se développer la physique a dû inventer l'horloge, seule capable de situer l'évolution des objets, par exemple des astres, dans le temps. Une horloge est, dit-on, un système physique particulier qui "bat la mesure" selon un rythme constant. Mais comment peut-on décréter qu'un pendule (pour faire simple) oscille périodiquement alors qu'on est en train de construire la première horloge ?

Les lois de la mécanique de Newton sont énoncées valables dans les référentiels galiléens mais qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ? Les traités de physique précisent (?) qu'il s'agit de référentiels particuliers où les lois de Newton s'appliquent, voilà qui ne fait guère avancer les choses !

La probabilité d'occurrence d’un tirage infiniment répétable dans des conditions équivalentes est définie comme la limite du rapport du nombre observé de ce tirage à la somme de tous les tirages considérés comme équiprobables. Mais que sont des événements équiprobables alors qu'on est occupé à définir la notion de probabilité ?

La loi de la sélection naturelle enseigne que l'espèce qui survit préférentiellement est celle qui s'est le mieux adaptée au milieu ambiant au cours de siècles. Mais si l'on demande ce que signifie concrètement l'adaptation invoquée, en exigeant comme il se doit un critère effectif capable de décider si oui ou non il y a eu adaptation, alors on se trouve réduit à ne pouvoir proposer que le critère de survie, on tourne en rond.

Ces cercles vicieux sont connus depuis longtemps et les parades trouvées pour s'en extraire passent en dernière analyse par l'adoption d'un cadre axiomatique. Il s'agit de poser, ab initio, un certain nombre de principes incontestés (et non pas incontestables !) par une majorité de scientifiques afin d'en tirer un ensemble de conséquences logiques. Ce sont les mathématiciens qui ont montré la voie.

obligation de cohérence

obligation de conformité (à la réalité du monde sensible)

l'art y échappe dans une large mesure

***La parade des mathématiciens.***

Les mathématiques ne pouvant s’accommoder d’à peu près, elles prévoient, depuis les travaux d’Hilbert, d’échapper au problème de la tautologie initiale en recourant aux bienfaits de l'axiomatique. Il s’agit de définir, dans un premier temps, l’ensemble des objets sur lesquels on désire travailler, ensuite, de fixer un ensemble de règles (les axiomes) auxquelles ces objets obéissent par principe, enfin de prévoir l’ensemble des règles logiques permettant de développer les axiomes en propositions de plus en plus sophistiquées, les théorèmes.

Voici un système axiomatique très simple :

Cette démarche louable a un prix que l'on connaît depuis que Gödel a démontré son théorème d'incomplétude : aucun système axiomatique suffisamment évolué ne peut être démontré non contradictoire.

Le degré d'évidence d'une proposition scientifique est entièrement dépendant du degré de compétence de celui qui en prend connaissance.

Le (2ème) théorème de Gödel a aujourd'hui perdu de son mystère : avec le temps il a acquis le statut de quasi évidence.

La physique repose sur deux grands principes : l'énergie de l'Univers est constante et son entropie de décroît jamais.

L'entropie de l'univers croît toutes les fois que celui-ci est le siège d'une transformation irréversible;

Un système chaotique est le siège d'une transformation irréversible.

Le théorème de Noether associe, sous certaines hypothèses, une grandeur conservée aux symétries continues du système dynamique. L'exemple classique est celui du problème à deux corps pour lequel les symétries par translation temporelle, par translation spatiale et par rotation spatiale entrainent les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Bien noter que le système est constitué de deux corps et que c'est la grandeur totale qui se conserve; Les lois de conservation se perdent si on simplifie outrageusement ce problème Képlérien en un mouvement d'un corps autour d'un centre fixe : clairement dans ce cas la quantité de mouvement ne se conserve pas sauf à prêter au centre fixe une quantité de mouvement ad hoc que le calcul renseigne comme une grandeur indéterminée. L'énergie cependant se conserve dans ce cas particulier

Dans l'ensemble des grandeurs conservées, l'énergie joue un rôle à part, plus général que ce que le théorème de Noether pourrait laisser supposer.

Les physiciens sont de gros consommateurs de laplacien : beaucoup de fonctions spéciales de la physique sont directement issues de la séparation des variables dans divers systèmes de coordonnées orthogonales. A cet égard le problème de l'atome H est séparable en coordonnées sphériques et paraboliques mais cela ne signifie évidemment pas qu'une solution en termes des coordonnées cartésiennes n'existe pas, elle est simplement d'un aspect repoussant.

La science c'est aussi l'art de différencier ce qui est possible de ce qui ne l'est pas.

**0.114 Le problème de la mesure indirecte.**

Le problème se résume en affirmant qu'il est rare, dans les domaines de pointe, que les résultats d'une expérience soient affranchis d'un modèle théorique particulier. Si cela est vrai, on comprend qu'il y a là un obstacle au jugement comparatif sain entre deux modèles théoriques distincts dont un seul a inféodé l'expérience. Précisons notre pensée. Si l'on désire mesurer la masse volumique d'un cylindre, on devrait y parvenir, sans référence à un modèle partisan, en procédant aux mesures directes des paramètres nécessaires, masse et dimensions. Certes, le recours au cadre de la géométrie d'Euclide est sous-entendu mais elle fait, à l'échelle du laboratoire, l'objet d'un consensus tel, que sans lui, il n'y a plus rien moyen d'entreprendre. Mais supposons que l'on décide de mesurer, par déflexion électrique, le rapport e/m qui concerne l'électron. Mesure-t-on réellement ce rapport? Evidemment la réponse est négative: on mesure la déviation du faisceau des électrons, c'est-à-dire une distance, puis on tente de relier cette distance à la grandeur cherchée en se moulant dans le cadre des théories mécanique et électrique en vigueur et c'est très différent. L'exemple choisi n'est sans doute pas trop grave car des mesures de la même quantité basées sur d'autres principes viennent recouper la valeur obtenue mais le principe demeure qu'il y aura toujours un danger à mêler l'expérimentation à un modèle théorique particulier. Cela est particulièrement vrai dans tous les cas où le traitement des données expérimentales comporte des ajustements sur un grand nombre de paramètres car ces paramètres sont hérités d'une théorie particulière, ce qui ne leur garantit aucune existence légale. A la limite on pourrait, dans cet ordre d'idée, conférer des valeurs numériques à des grandeurs purement fictives et croire qu'elles ont, de ce simple fait, acquis droit de cité. Un exemple typique est l'affichage, dans la table des propriétés particulaires publiées par le CERN, du résultat de la "mesure" de toute une série de paramètres de désintégration des particules instables. Ces "mesures" ne sont, en fait, que le résultat de l'ajustement d'une ensemble de paramètres que le modèle standard définit car il croit en leur existence. Or un ajustement de ce type fournit fatalement un résultat numérique. Quelle preuve peut-on en tirer de l'existence **réelle** de la grandeur paramétrisée? Ce côté pervers de l'ajustement tous azimuts était déjà épinglé, non sans humour, au début du XXème siècle par l'illustre Henri Poincaré: "*Il est clair qu'en donnant des dimensions convenables aux tuyaux de communication entre ses réservoirs et des valeurs convenables aux fuites, M. Jeans pourra rendre compte de n'importe qu'elle constatation expérimentale. Mais ce n'est pas là le rôle des théories physiques. Elles ne doivent pas introduire autant de constantes arbitraires qu'il y a de phénomènes à expliquer; elles doivent établir une connexion entre les divers faits expérimentaux et surtout permettre la prévision*". La remarque de Poincaré demeure plus applicable que jamais.

**0.115 Le problème posé par l’intervention de l’instrument de mesure.**

L’utilisation d’un instrument de mesure pose également problème au physicien. La raison en est que toute mesure implique nécessairement une perturbation du système lui-même. Considérons le cas élémentaire d’une mesure de vitesse d’un objet en plein vol le long d’une règle graduée. Nous avons l’intention de mesurer la distance parcourue ainsi que le temps mis à la parcourir. Le repérage des coordonnées du segment parcouru exige au moins que l’on voie l’objet. Cela ne peut se concevoir qu’en l’éclairant afin qu’il nous renvoie une partie de la lumière reçue afin de signaler sa position. Mais éclairer un objet, c’est le bombarder de photons qui, en rebondissant, perturbent fatalement sa trajectoire. Du même coup la mesure s’en trouvera faussée.

Un autre exemple classique de cette perturbation inévitable causée par l’instrument de mesure concerne la mesure du courant dans un circuit parcouru par un courant constant. Une batterie de 12V, par exemple, envoie un courant dans une résistance de 120Ω, par exemple. L’appareil utilisé, un ampèremètre, est inséré en série dans le circuit. En principe, on s’attend à mesurer un courant de 12/120 = 0.1A. Le hic, c’est que en introduisant l’ampèremètre, on a, ipso facto, introduit une résistance supplémentaire de quelques ohms, disons 1Ωpour fixer les idées. Cet ohm vient s’ajouter aux 120Ωdéjà présents, en sorte que la mesure indique une valeur, facile à calculer, soit 12/121 = 0.9917A, moindre que 0.1A. Si nous avons détaillé cet exemple c’est qu’il permet d’entrevoir deux remèdes possibles à cette situation gênante.

Une première parade consiste à connaître la valeur exacte de la résistance interne, RA, de l’ampèremètre, ici 1Ω et à corriger la valeur mesurée de la façon suivante.  Le courant dans le circuit est donné par les formules élémentaires que voici, valables selon que l’ampèremètre est absent ou présent :

 et .

Connaissant imesuré, on remonte donc facilement à la valeur réelle du courant, grâce à la formule :

.

Une autre stratégie découle de la précédente. On remarque, en effet, que plus la résistance interne de l’ampèremètre est choisie petite et moins le courant mesuré s’écarte de sa valeur réelle. On en conclut qu’il suffit de prendre la précaution de n’utiliser qu’un appareil de mesure suffisamment peu perturbant compte tenu de la précision exigée pour la mesure. Dans l’exemple choisi on sait que la précision relative vaut RA/120. Un ampèremètre de résistance interne 0.1Ωgarantit une précision de un pour dix-mille environ.

Ces stratégies sont efficaces lorsqu’on fait, en laboratoire, des mesures qui portent sur des objets macroscopiques. Le point essentiel est de comprendre qu’elles échouent complètement lorsqu’on essaye de les transposer à l’échelle atomique. Quel que soit le soin que l’on apporte au dispositif de mesure, la perturbation du système est non seulement impossible à corriger mais encore à diminuer au-delà d’une limite qui est fixée par le principe de l’incertitude quantique.

**La complexité des systèmes.**

Une fois de plus le terme complexité ne revêt pas son sens habituel d’ailleurs vague. La complexité est une notion fondamentale en sciences, encore faut-il qu’elle reçoive une définition qui la mette à l’abri des interprétations douteuses. On commence par définir la complexité d’une suite binaire puis on généralisera à la complexité des systèmes physiques pour lesquels elle prend le nom plus savant d’entropie.

La complexité d’une suite, binaire pour simplifier mais cela n’est jamais réducteur, vaut la longueur du plus court programme informatique capable de l’imprimer au terme d’un calcul qui s’arrête. Ce programme minimal apparaît comme le meilleur algorithme compresseur de cette suite.

La complexité, K, d’une suite de longueur, N, est comprise entre deux limites définies dans un premier temps à une constante près :

La suite constante de longueur N, 0}N, est clairement de faible complexité puisque son programme minimal peut s’écrire : **.** Il consomme essentiellement, , où *c* est une composante fixe, généralement négligeable, qui dépend du langage informatique utilisé. Ce facteur constant n’est pas gênant dès l’instant où on utilise le même langage dans tous les cas. Si vraiment on veut se débarrasser de ce facteur constant, il faut adopter le langage idéalement concis des machines de Turing simples (MTS). Cette option est effectivement attrayante et nous la développons ci-après.

Une suite de longueur N possède une complexité au moins égale à, car il faut au minimum que le programme contienne l’énoncé de l’entier N qui définit sa longueur. A l’opposé, une suite de longueur N ne peut être de complexité supérieure à N car il existe un programme trivial qui imprime successivement les éléments de la suite sans faire aucun calcul, ***.*** Une suite de complexité égale à sa longueur, N, est clairement incompressible par quelque méthode algorithmique que ce soit : elle est aléatoire. Il n’existe pas de meilleure définition du caractère aléatoire d’un système que cette impossibilité d’en produire une description plus courte que sa description in extenso.

La complexité algorithmique d’un système physique rejoint la notion d’entropie. Tout système peut être décrit par une suite de caractères binaires qui en précise la structure à un instant donné avec une précision donnée. Par exemple, un gaz monoatomique est complètement décrit au niveau microscopique par l’énoncé des positions et des vitesses de chacune de ses molécules. Dans un gaz à l’équilibre, aucune description ne peut faire mieux que la description in extenso et il importe peu que ce travail soit pratiquement irréalisable. Ce système à l’équilibre est aléatoire et son entropie est maximum. Aucun programme ne pouvant évidemment faire mieux que celui qui est déjà minimal, il est inutile d’espérer que l’entropie de ce gaz puisse diminuer. A cet égard le second principe de la thermodynamique apparaît désormais comme une évidence, conséquence imparable du fait qu’il est impossible de faire mieux que ce qui l’est déjà. L’objection suivante est fausse mais sa réfutation est intéressante : si on prépare (en pensée !) le même gaz dans des conditions très particulières où les molécules sont régulièrement espacées et toutes animées de la même vitesse, il se trouve très loin de l’équilibre. Son entropie est très basse car la longueur du programme qui encode les positions et les vitesses des molécules est court, uns double boucle suffisant à cet effet. Les chocs intermoléculaires auront tôt fait de mettre du désordre dans ce système qui rejoint très vite l’équilibre : cette évolution irréversible s’accompagne clairement d’une augmentation d’entropie de l’univers. A ce stade, il semblerait que l’on ait trouvé un programme plus court que la description in extenso : celui qui part de la courte description hors-équilibre et qui ajoute simplement l’énoncé des équations de Newton pour régler les collisions successives. Cet argument est fallacieux car les chocs intermoléculaires induisent une dynamique chaotique donc une perte radicale de chiffres significatifs dans la description des positions et des vitesses de molécules. Pour garantir une description du système actuel (à l’équilibre), il aurait fallu consigner l’état antérieur (hors équilibre) avec un excès de chiffres significatifs dont l’encodage correspondrait précisément à la différence d’entropie que l’on voulait contester. A cet égard, la théorie du chaos fournit l’explication de l’irréversibilité de l’évolution des systèmes et de l’augmentation concomitante de l’entropie de l’univers.

La complexité algorithmique d’une suite ne prend en considération que la longueur du programme générateur minimal sans se soucier du temps de calcul que cela a coûté. La profondeur logique tente de combler cette lacune, étant définie précisément comme le temps de calcul du programme minimum. Encore faut-il préciser le support hardware qui effectue ce calcul. On standardise cette notion en adoptant le formalisme des MTS et en assimilant le temps de calcul au nombre de pas d’évolution de la MTS minimale. Les suites aléatoires ont une profondeur logique faible, N, puisque leur MTS minimale se résume à une simple imprimante. A l’opposé il n’y a pas de limite supérieure formelle à la profondeur logique d’une suite ???? : la suite des N premiers chiffres binaires du nombre Pi exige un temps de calcul considérable en dépit du fait qu’il existe quantité de MTS imprimantes qui font le m^me travail en N pas ???. Précisons que la profondeur logique est une notion d’applicabilité restreinte et qu’en particulier, contrairement à la complexité, K, la physique n’en fait aucun usage connu.